

***. Đề kiểm tra rèn luyện**

♦ Đề 1:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Cho hai điểm $M(1; -2; 3)$ và $N(3; 4; -5)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{NM}$ là:

- A. $(-2; 6; 8)$. B. $(2; 6; -8)$. C. $(-2; 6; -8)$. D. $(-2; -6; 8)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{NM} = (1-3; -2-4; 3-(-5)) = (-2; -6; 8).$$

Câu 2: Cho hai điểm $\vec{u} = (3; -4; 5)$, $\vec{v} = (5; 7; -1)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ là

- A. $(8; 3; 4)$. B. $(-2; -11; 6)$. C. $(2; 11; -6)$. D. $(-8; -3; -4)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \vec{u} + \vec{v} = (3+5; -4+7; 5+(-1)) = (8; 3; 4).$$

Câu 3: Khoảng cách giữa hai điểm $I(1; 4; -7)$ và $K(6; 4; 5)$ là

- A. 169. B. 13. C. 26. D. 6,5.

Lời giải

$$IK = \sqrt{5^2 + 0^2 + 12^2} = 13$$

Câu 4: Cho hai điểm $M(1; -2; 3)$ và $N(3; 4; -5)$. Trung điểm của đoạn thẳng MN có tọa độ là

- A. $(-2; 1; 1)$. B. $(2; 1; 1)$. C. $(-2; 1; -1)$. D. $(2; 1; -1)$.

Lời giải

$$\text{Tọa độ trung điểm của } AB \text{ là } \left(\frac{1+3}{2}; \frac{-2+4}{2}; \frac{3-5}{2} \right) = (2; 1; -1)$$

Câu 5: Cho tam giác MNP có $M(0; 2; 1)$, $N(-1; -2; 3)$ và $P(1; 3; 2)$. Trọng tâm của tam giác MNP có tọa độ là:

- A. $(0; 1; 2)$. B. $(0; 3; 6)$. C. $(0; -3; -6)$. D. $(0; -1; -2)$.

Lời giải

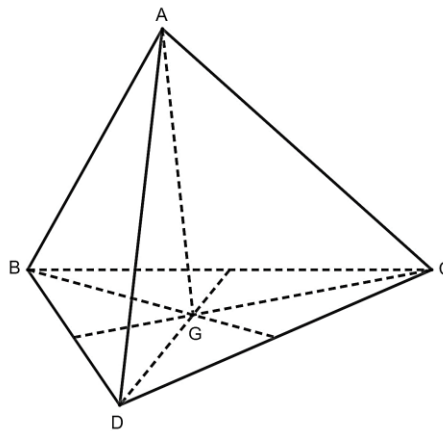
$$\text{Trọng tâm } G \text{ của tam giác } MNP \text{ có tọa độ là } \begin{cases} x_G = \frac{x_M + x_N + x_P}{3} = \frac{0 + (-1) + 1}{3} = 0 \\ y_G = \frac{y_M + y_N + y_P}{3} = \frac{2 + (-2) + 3}{3} = 1 \\ z_G = \frac{z_M + z_N + z_P}{3} = \frac{1 + 3 + 2}{3} = 2 \end{cases}$$

Vậy tọa độ trọng tâm của tam giác MNP là $(0;1;2)$.

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G là trọng tâm tam giác BCD . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.
 C. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BG}$. D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Lời giải

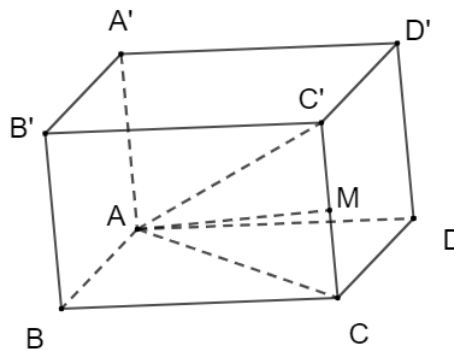


Vì điểm G là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ nên đáp án sai là **D**.

Câu 7: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Lấy M là trung điểm đoạn thẳng CC' . Vectơ $\overrightarrow{AM}$ bằng

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.
 C. $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

Lời giải



M là trung điểm đoạn thẳng CC' nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AC})$

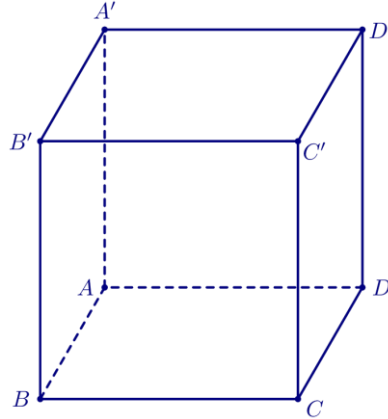
Mặt khác, $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Nên $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

Câu 8: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB'}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AD'}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$.

Lời giải

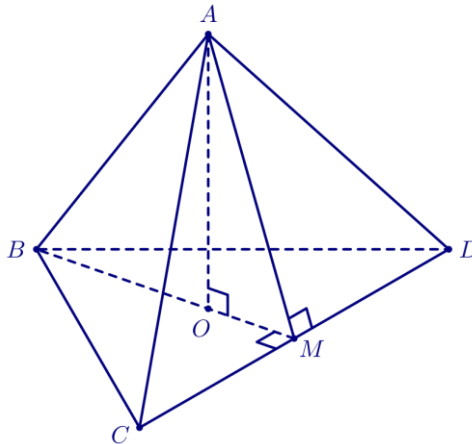


Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'} \neq \overrightarrow{AC'}$ nên đáp án D sai.

Câu 9: Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a , gọi M là trung điểm cạnh CD . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ bằng

- A. $\frac{a^2}{4}$. B. $\frac{a^2}{2}$. C. $\frac{a^2}{3}$. D. a^2 .

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = AB \cdot AM \cdot \cos BAM = AB \cdot AM \cdot \frac{AB^2 + AM^2 - BM^2}{2AB \cdot AM} = \frac{AB^2}{2} = \frac{a^2}{2}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; -2; 2)$; $\vec{a} = (-2; 0; 3)$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- A. $\vec{a} + \vec{b} = (-1; -2; 5)$. B. $\vec{a} - \vec{b} = (3; -2; -1)$. C. $3\vec{a} = (3; -2; 2)$. D. $2\vec{a} + \vec{b} = (0; -4; 7)$

Lời giải

Ta có: $3\vec{a} = (3; -6; 6)$. Nên đáp án **C** sai.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-1; 0; 3)$; $B(2; 1; -1)$ và $C(3; 2; 2)$.

Tọa độ của điểm D là

- A.** $(2; -1; 0)$. **B.** $(0; -1; -6)$. **C.** $(0; 1; 6)$. **D.** $(-2; 1; 0)$.

Lời giải

Gọi $D(x; y; z)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3; 1; -4)$; $\overrightarrow{DC} = (3 - x; 2 - y; 2 - z)$.

$$ABCD \text{ là hình bình hành thì } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = 3 \\ 2 - y = 1 \\ 2 - z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 6 \end{cases}. \text{ Vậy } D(0; 1; 6).$$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 0; -1)$; $B(0; -1; 2)$ và $G(2; 1; 0)$. Biết tam giác ABC có trọng tâm là điểm G . Tọa độ của điểm C là

- A.** $(5; 4; -1)$. **B.** $(-5; -4; 1)$. **C.** $(1; 2; -1)$. **D.** $(-1; -2; 1)$.

Lời giải

$$\text{Vì tam giác } ABC \text{ có trọng tâm là điểm } G \text{ nên } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó, tọa độ của điểm } C \text{ là } \begin{cases} x_C = 3 \cdot 2 - 1 - 0 = 5 \\ y_C = 3 \cdot 1 - 0 - (-1) = 4 \\ z_C = 3 \cdot 0 - (-1) - 2 = -1 \end{cases}. \text{ Chọn đáp án } \mathbf{A}.$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC có các đỉnh $A(1; -2; 0)$, $B(2; 1; -2)$, $C(0; 3; 4)$.

a) Tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{AB}$ là $(1; 3; -2)$.

b) Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(1; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

c) Tọa độ hình chiếu của điểm B trên mặt phẳng Oxy là $H(0; 0; -2)$.

d) $\vec{x} = 2\vec{AB} - 3\vec{BC}$. Tọa độ của véc tơ $\vec{x} = (-4; 12; 14)$

Lời giải

a) Đúng.

$$\vec{AB} = (1; 3; -2).$$

b) Đúng.

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 1 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{2}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

c) Sai.

Tọa độ hình chiếu của điểm $B(2; 1; -2)$ trên mặt phẳng Oxy là $H(2; 1; 0)$.

d) Sai.

$$\vec{AB} = (1; 3; -2) \Rightarrow 2\vec{AB} = (2; 6; -4)$$

$$\vec{BC} = (-2; 2; 6) \Rightarrow -3\vec{BC} = (6; -6; -18)$$

$$\text{Vậy } \vec{x} = (8; 0; -22).$$

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; -1; 1)$, $B(-2; 1; -1)$, $C(-1; 3; 2)$, $D(-1; 0; 0)$.

a) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Ba điểm A, B, D thẳng hàng.

c) Cosin của góc giữa $\vec{AB}$ và $\vec{CB}$ bằng $-\frac{\sqrt{42}}{21}$.

d) Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

Lời giải

a) Đúng.

$$\vec{AB} = (-2; 2; -2), \vec{BC} = (1; 2; 3)$$

Vì $\frac{-2}{1} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{-2}{3}$ nên $\vec{AB} \neq k\vec{BC}$. Suy ra ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Đúng.

$$\overrightarrow{AB} = (-2; 2; -2), \overrightarrow{BD} = (1; -1; 1)$$

$$\text{Vì } \frac{-2}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{-2}{1} = -2 \text{ nên } \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{BD}.$$

Suy ra điểm A, B, D thẳng hàng.

c) Sai.

$$\overrightarrow{AB} = (-2; 2; -2).$$

$$\overrightarrow{CB} = (-1; -2; -3).$$

$$\text{Ta có: } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}}{AB \cdot CB} = \frac{(-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-3)}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{42}}{21}.$$

d) Sai.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-2; 2; -2), \overrightarrow{AC} = (-1; 4; 1), \overrightarrow{AD} = (-1; 1; -1)$$

$$[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (10; 4; -6)$$

$$\text{Ta có } [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 10 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + (-6) \cdot (-1) = 0 \text{ nên ba vector } \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD} \text{ đồng phẳng}$$

Nên bốn điểm $A; B; C; D$ đồng phẳng.

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Trên các cạnh CD và BB' ta lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $DM = BN = x$ với $0 \leq x \leq a$. Các mệnh đề dưới đây đúng hay sai?

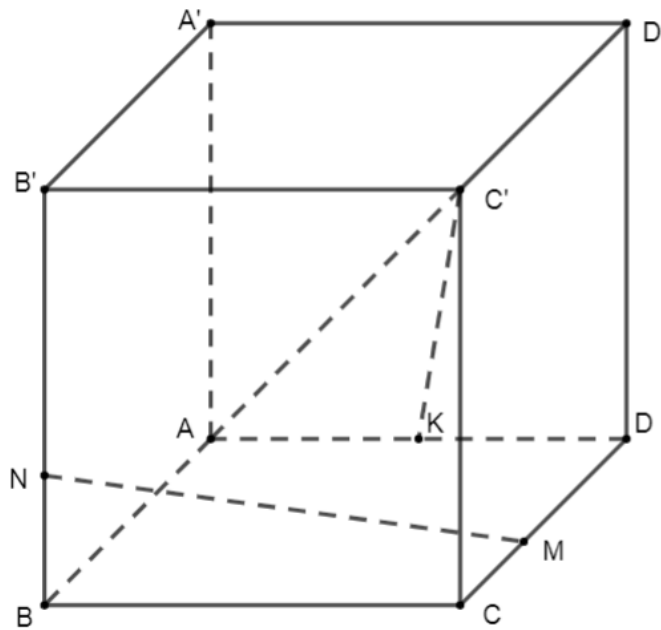
a) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

b) Gọi K là trung điểm AD khi đó $\overrightarrow{C'K} = \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{C'D'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C'B'}$.

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B'D'} = a^2$.

d) Góc giữa vector $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{MN}$ bằng 60° .

Lời giải



a) Đúng.

b) Đúng.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{C'K} = \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{C'C} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{C'C} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{C'D'})$$

$$= \overrightarrow{C'C} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{C'D'}) = \overrightarrow{C'C} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{C'D'}$$

c) Sai.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B'D'} &= (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B}) \cdot \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{B'D'} + \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{B'D'} + \overrightarrow{B'B} \cdot \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{B'D'} \\ &= A'B' \cdot B'D' \cdot \cos(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{B'D'}) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos(135^\circ) = -a^2 \end{aligned}$$

d) Đúng.

$$\text{Ta đặt } \overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}. \text{ Ta có } |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$$

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ hay } \overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Mặt khác

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}) \text{ với } \overrightarrow{BN} = \frac{x}{a} \cdot \vec{a} \text{ và } \overrightarrow{DM} = \frac{x}{a} \cdot \vec{b}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MN} = \left(\vec{b} + \frac{x}{a} \vec{a} \right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a} \vec{b} \right) = \frac{x}{a} \vec{a} + \left(a - \frac{x}{a} \right) \vec{b} - \vec{c}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \left[\frac{x}{a} \vec{a} + \left(a - \frac{x}{a} \right) \vec{b} - \vec{c} \right]$$

Vì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ nên ta có

$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{x}{a} \vec{a}^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \vec{b}^2 - \vec{c}^2 = x.a + \left(1 - \frac{x}{a}\right) a^2 - a^2 = 0$, vậy góc giữa vector $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{MN}$ bằng 90° .

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-3; 4; 2)$, $B(-5; 6; 2)$, $C(-10; 17; -7)$.

a) Tọa độ trung điểm của AB là $I(-4; 5; 2)$.

b) Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G(-6; 9; -1)$.

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 10$.

d) Tọa độ trực tâm của tam giác ABD là $H(-5; 12; 4)$.

Lời giải

a) Đúng.

Gọi I là trung điểm của AB . Khi đó

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3 + (-5)}{2} = -4 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow I(-4; 5; 2).$$

b) Đúng.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .

Khi đó

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-3 + (-5) + (-10)}{3} = -6 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{4 + 6 + 17}{3} = 9 \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{2 + 2 + (-7)}{3} = -1 \end{cases} \Rightarrow G(-6; 9; -1).$$

c) Sai.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 0)$, $\overrightarrow{DC} = (-10 - x_D; 17 - y_D; -7 - z_D)$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 - x_D = -2 \\ 17 - y_D = 2 \\ -7 - z_D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -8 \\ y_D = 15 \\ z_D = -7 \end{cases} \Rightarrow D(-8; 15; -7)$

.

$\overrightarrow{AD} = (-5; 11; -9)$. Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -2 \cdot (-5) + 2 \cdot 11 + 0 \cdot (-9) = 32$.

d) Sai.

Gọi $H(a; b; c)$ là trực tâm của tam giác ABD . Do đó
$$\begin{cases} \overline{AH} \perp \overline{BD} \\ \overline{BH} \perp \overline{AD} \\ [\overline{AB}, \overline{AD}] \cdot \overline{AH} = 0 \end{cases}$$

$$\overline{AH} = (a+3; b-4; c-2), \overline{BH} = (a+5; b-6; c-2), \overline{BD} = (-3; 9; -9), \overline{AD} = (-5; 11; -9),$$

$$\overline{AB} = (-2; 2; 0).$$

$$[\overline{AB}, \overline{AD}] = (-18; -18; -12).$$

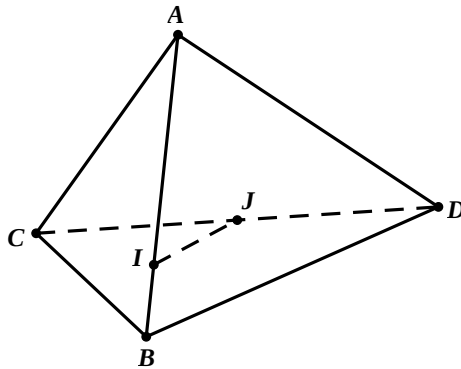
$$\text{Suy ra } \begin{cases} -3(a+3) + 9(b-4) - 9(c-2) = 0 \\ -5(a+5) + 11(b-6) - 9(c-2) = 0 \\ -18(a+3) - 18(b-4) - 12(c-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 9b - 9c = 27 \\ -5a + 11b - 9c = 73 \\ -18a - 18b - 12c = -42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-153}{11} \\ b = \frac{100}{11} \\ c = \frac{118}{11} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } H\left(\frac{-153}{11}; \frac{100}{11}; \frac{118}{11}\right).$$

👉 Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: (1,0 điểm). Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD = a$, $\angle BAC = \angle BAD = 60^\circ$, $\angle CAD = 90^\circ$. Gọi I là điểm trên cạnh AB sao cho $AI = 3IB$ và J là trung điểm của CD . Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overline{AB}$ và $\overline{IJ}$?

Lời giải



$$\text{Ta có: } \overline{IJ} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \left(\overline{AC} + \overline{AD} - \frac{3}{2} \overline{AB} \right) \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \left(\overline{AC} \cdot \overline{AB} + \overline{AD} \cdot \overline{AB} - \frac{3}{2} \overline{AB}^2 \right)$$

$$\text{Lại có } \overline{AB} \cdot \overline{AD} = AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{AC} \cdot \overline{AB} = AC \cdot AB \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Vậy: } \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} - \frac{3}{2} a^2 \right) = -\frac{a^2}{4}$$

$$\text{Có } \angle CAD = 90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0.$$

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \frac{3}{2} \overrightarrow{AB} \right)$$

$$IJ^2 = \overrightarrow{IJ}^2 = \frac{1}{4} \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \frac{3}{2} \overrightarrow{AB} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{17}{4} a^2 + 2 \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - 3 \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - 3 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \right) = \frac{5a^2}{16}$$

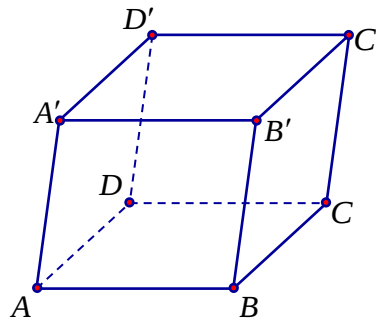
$$\Rightarrow IJ = \frac{a\sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{Vậy: } \cos(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB}}{IJ \cdot AB} = \frac{-\frac{a^2}{4}}{\frac{a\sqrt{5}}{4} \cdot a} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Câu 2: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$. Tìm toạ độ các đỉnh C và A' của hình hộp?

Lời giải

Đáp số: $C(3; 3; 0)$, $A'(0; 0; -3)$.



Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 0; 0)$, $\overrightarrow{AD} = (0; 3; 0)$

Gọi $C(x_1; y_1; z_1) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (x_1; y_1 - 3; z_1)$

Vì $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 - 3 = 0 \\ z_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 3 \\ z_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(3; 3; 0).$

Gọi $A'(x_2; y_2; z_2) \Rightarrow \overrightarrow{A'D'} = (-x_2; 3 - y_2; -3 - z_2)$

Vì $ADD'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 = 0 \\ 3 - y_2 = 3 \\ -3 - z_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 0 \\ z_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow A'(0; 0; -3).$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(0; 1; -1)$, $B(1; 1; 2)$, $C(1; -1; 0)$, $D(0; 0; 1)$.
Tìm một vector khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vector $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BD}$?

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (0; -2; -2)$, $\overrightarrow{BD} = (-1; -1; -1)$

Khi đó: $\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \right] = (0; 2; -2)$ là một vector thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 4: Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 9)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $C(x; y; z)$. Tính $x + y + z$.

Lời giải

Đáp số: 1954.

Vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $C(x; y; z)$.

Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

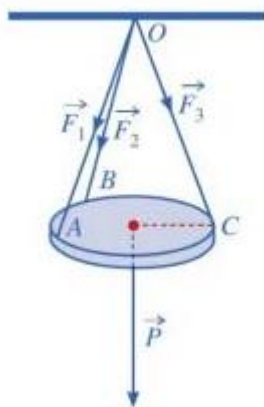
Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \left(\frac{940-800}{2}; \frac{550-500}{2}; \frac{9-7}{2} \right) = (70; 25; 1).$$

$$\text{Mặt khác, } \overrightarrow{BC} = (x-940; y-550; z-9) \text{ nên } \begin{cases} x-940 = 70 \\ y-550 = 25 \\ z-9 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó } \begin{cases} x = 1010 \\ y = 575 \\ z = 9 \end{cases} \Rightarrow x + y + z = 1594.$$

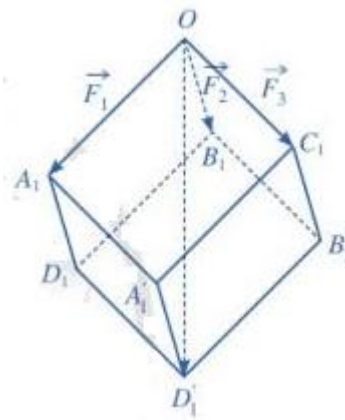
Câu 5: Một tấm gỗ tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên tấm gỗ tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn $|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{F_3}| = 10(N)$ (xem hình vẽ).



Tính trọng lượng P của tấm gỗ tròn đó.

Lời giải

Đáp số: $10\sqrt{3} \text{ (N)}$.



Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{F_3}$

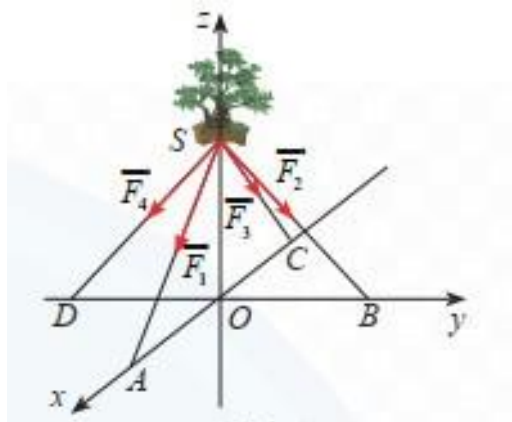
Lấy các điểm D_1, A'_1, B'_1, D'_1 sao cho $OA_1D_1B_1.C_1A'_1D'_1B'_1$ là hình hộp.

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD'_1}$

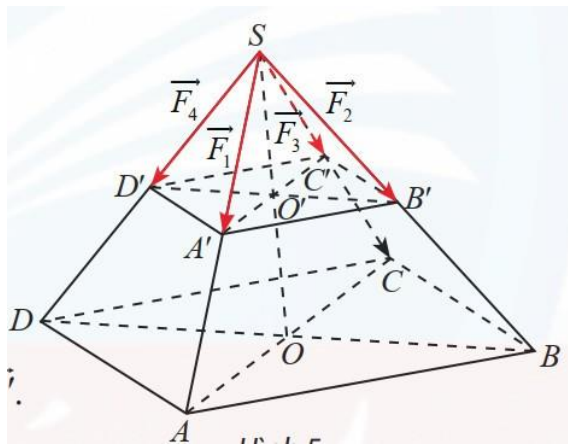
Do các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn: $|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{F_3}| = 10 \text{ (N)}$

nên hình hộp $OA_1D_1B_1.C_1A'_1D'_1B'_1$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế $OA_1D_1B_1.C_1A'_1D'_1B'_1$ là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 10, suy ra độ dài đường chéo bằng $10\sqrt{3}$

Câu 6: (1,0 điểm) Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0;0;30)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(30;0;0), B(0;20;0), C(-20;0;0), D(0;-20;0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn 60 N và được phân bố thành bốn lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ có độ lớn bằng nhau như hình vẽ. Tính $|\overrightarrow{F_1} + 2\overrightarrow{F_2} + 3\overrightarrow{F_3} + 4\overrightarrow{F_4}|$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải



Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình vuông.

Ta có: $\overrightarrow{SA} = (30; 0; -30)$, $\overrightarrow{SB} = (0; 20; -20)$, $\overrightarrow{SC} = (-20; 0; -20)$, $\overrightarrow{SD} = (0; -20; -20)$

$\Rightarrow SA = SB = SC = SD = 30\sqrt{2}$. Do đó $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.

Các vectơ $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ có điểm đầu tại S và điểm cuối lần lượt là A', B', C', D' .

Ta có $SA' = SB' = SC' = SD'$ nên $S.A'B'C'D'$ cũng là hình chóp tứ giác đều.

Gọi $\overrightarrow{F}$ là trọng lực tác dụng lên chậu cây và O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$. Ta có:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{SA'} + \overrightarrow{SB'} + \overrightarrow{SC'} + \overrightarrow{SD'} = 4\overrightarrow{SO'}$$

Ta có: $|\overrightarrow{F}| = 60 \Rightarrow |\overrightarrow{SO'}| = SO = 15$.

Do tam giác $SO'A'$ vuông cân nên

$$SA' = SO'\sqrt{2} = 15\sqrt{2} = \frac{1}{2}SA \Rightarrow \overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{SA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} = (15; 0; -15)$$

Chứng minh tương tự ta cũng có:

$$\overrightarrow{F_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} = (0; 15; -15), \overrightarrow{F_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} = (-15; 0; -15), \overrightarrow{F_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} = (0; -15; -15)$$

Suy ra: $\overrightarrow{F_1} + 2\overrightarrow{F_2} + 3\overrightarrow{F_3} + 4\overrightarrow{F_4} = (-30; -30; -150) \Rightarrow |\overrightarrow{F_1} + 2\overrightarrow{F_2} + 3\overrightarrow{F_3} + 4\overrightarrow{F_4}| = 90\sqrt{3} \approx 156$.

•Đề 2:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 1; -3)$; $\vec{b} = (-2; -1; 2)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng

A. -2.

B. -11.

C. 11.

D. 2.

Lời giải

Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 = -11$. Chọn đáp án **B**.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a . Véc tơ nào bằng véc tơ $\overrightarrow{D'C'}$

A. $\overrightarrow{DD'}$.

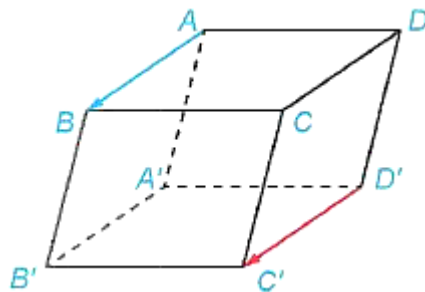
B. $\overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{AB}$.

D. $\overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Vì véc tơ $\overrightarrow{AB}$ có cùng hướng và cùng độ dài với véc tơ $\overrightarrow{D'C'}$ nên: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D'C'}$.



Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(2;1;-4)$. Véc tơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A.** $(1;2;-6)$. **B.** $(1;0;-6)$. **C.** $(-1;-2;6)$. **D.** $(3;0;-2)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2-1; 1-(-1); -4-2) = (1;2;-6)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho biểu diễn của vectơ $\vec{a}$ qua các vectơ đơn vị là $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

- A.** $(2;-3;1)$. **B.** $(1;-3;2)$. **C.** $(2;1;-3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Lời giải

Ta có: $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 1\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = (2;-3;1)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình bình hành $ABCD$ và các đỉnh có tọa độ lần lượt là $A(3;1;2), B(1;0;1), C(2;3;0)$. Tọa độ đỉnh D là

- A.** $D(1;1;0)$. **B.** $D(0;2;-1)$. **C.** $D(4;4;1)$. **D.** $D(1;3;-1)$.

Lời giải

Ta có $ABCD$ là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 3 = 1 \\ y_D - 1 = 3 \\ z_D - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 4 \\ z_D = 1 \end{cases} \Rightarrow D(4;4;1)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (-3;2;1)$ và điểm $A(4;6;-3)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ là

- A.** $(-1;-8;2)$. **B.** $(7;4;-4)$. **C.** $(1;8;-2)$. **D.** $(-7;-4;4)$.

Lời giải

Gọi $B(x;y;z)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (x-4; y-6; z+3)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = \vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = -3 \\ y-6 = 2 \\ z+3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \\ z = -2 \end{cases}$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 0; 1)$, $\vec{c} = (-1; 0; 1)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} - 3\vec{i}$.

- A.** $\vec{n} = (6; 2; 6)$. **B.** $\vec{n} = (6; 2; -6)$. **C.** $\vec{n} = (0; 2; 6)$. **D.** $\vec{n} = (-6; 2; 6)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 5; -1)$, $B(7; x; 1)$ và $C(9; 2; y)$. Để A, B, C thẳng hàng thì giá trị $x + y$ bằng

- A.** 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; x-5; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (6; -3; y+1)$

A, B, C thẳng hàng khi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{4}{6} = \frac{x-5}{-3} = \frac{2}{y+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x-5) = -12 \\ 4(y+1) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy $x + y = 5$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, điểm M thuộc trục Ox và cách đều hai điểm $A(4; 2; -1)$ và $B(2; 1; 0)$ là

- A.** $M(-4; 0; 0)$. **B.** $M(5; 0; 0)$. **C.** $M(4; 0; 0)$. **D.** $M(-5; 0; 0)$.

Lời giải

$M \in Ox \Rightarrow M(x; 0; 0)$.

Ta có: $\overrightarrow{MA} = (4-x; 2; -1)$, $\overrightarrow{MB} = (2-x; 1; 0)$

M cách đều hai điểm A, B khi

$$MA = MB \Leftrightarrow \sqrt{(4-x)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{(2-x)^2 + 1^2 + 0^2} \Leftrightarrow x = 4.$$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{a} = (2; 1; -2)$, $\vec{b} = (0; -1; 1)$. Góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bằng

- A.** 60° . **B.** 135° . **C.** 120° . **D.** 45° .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-2; 2; 2)$; $\vec{b} = (1; -1; -2)$. Côsin của góc giữa hai vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng

- A. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Ta có:

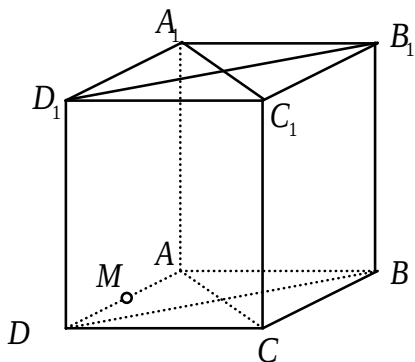
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{-2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Vậy } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 12: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a . Gọi M là trung điểm AD . Giá trị $\overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1}$ là:

- A. a^2 . B. $\frac{1}{2}a^2$. C. $\frac{3}{2}a^2$. D. $\frac{3}{4}a^2$.

Lời giải



$$\text{Ta có: } \overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1} = (\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1})$$

$$= \overrightarrow{B_1B} \cdot \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= -a^2 + a^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{a^2}{2}$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{a} = (1; -2; 3)$ và $\vec{b} = (2; -1; -1)$.

Cho các mệnh đề sau. Mệnh đề nào là mệnh đề **SAI**?

- A.** Vec tơ cùng vuông góc với vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có tọa độ bằng $(-5; -7; -3)$.
- B.** Vector $\vec{a}$ không cùng phương với vector $\vec{b}$.
- C.** Vector $\vec{a}$ không vuông góc với vector $\vec{b}$.
- D.** $|\vec{a}| = 14$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (5; 7; 3)$ nên **a** đúng.

Do $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-1} \neq \frac{3}{-1}$ nên vector $\vec{a}$ không cùng phương với vector $\vec{b}$ nên **b** đúng.

Do $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + (-2)(-1) + 3(-1) = 1$ nên vector $\vec{a}$ không vuông góc với vector $\vec{b}$ nên **c** đúng.

Ta có $|\vec{a}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ **d** sai.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào là mệnh đề **SAI**?

A. $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = 4\vec{SO}$.

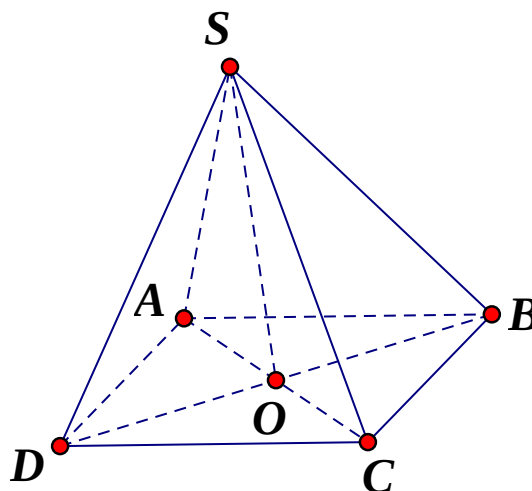
B. $\vec{SA} - \vec{SB} + \vec{SC} - \vec{SD} = \vec{0}$.

C. $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = \vec{0}$.

D. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$.

Lời giải

A Đúng	B Đúng	C Sai	D Đúng
--------	--------	-------	--------



+) Ta có O là trung điểm của AC nên $\vec{SA} + \vec{SC} = 2\vec{SO}$.

O là trung điểm của BD nên $\vec{SB} + \vec{SD} = 2\vec{SO}$.

Do đó $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = 4\vec{SO}$ là khẳng định đúng.

+) $\vec{SA} - \vec{SB} + \vec{SC} - \vec{SD} = \vec{BA} + \vec{DC} = \vec{0}$ là khẳng định đúng.

+) Ta có $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = 4\vec{SO}$ như chứng minh trên.

Do đó $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = \vec{0}$ là khẳng định sai.

+) Ta có O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

O là trung điểm của BD nên $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ là khẳng định đúng.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;-1)$, $B(3;1;0)$, $C(-1;1;3)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Ba điểm $A, B, D(4;1;1)$ thẳng hàng.

c) Góc $ABC = 45^\circ$.

d) $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; -7; 0)$.

Lời giải

a) Đúng.

Ta có

$\overrightarrow{AB} = (1; 0; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-3; 0; 4)$, $\overrightarrow{AB} \neq k \overrightarrow{AC} = (-3k; 0; 4k)$ với mọi k nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương, do đó ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Đúng.

Ta có

$\overrightarrow{AB} = (1; 0; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (2; 0; 2) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$, do đó ba điểm A, B, D thẳng hàng.

c) Sai.

Ta có

$\overrightarrow{BA} = (-1; 0; -1)$, $\overrightarrow{BC} = (-4; 0; 3) \Rightarrow \cos ABC = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \Rightarrow ABC \approx 82^\circ$

d) Đúng.

Ta có

$\overrightarrow{AB} = (1; 0; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-3; 0; 4) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0.4 + 0.1; 1.(-3) - 1.4; 1.0 + 0.(-3)) = (0; -7; 0)$

Câu 4: Cho 3 điểm $A(-1; 2; 1)$; $B(2; -2; 4)$; $C(0; -4; 1)$.

a) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Điểm $D(5; -6; 7)$. Khi đó 3 điểm A, B, D thẳng hàng.

c) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{37}{\sqrt{1258}}$.

d) Cho $\vec{u}(x-1; 2y+1; 3z-5)$ thỏa mãn $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}; \vec{u} \perp \overrightarrow{AC}$. Khi đó $x^2 + y^2 + z^2 = 2024$

Lời giải

a) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{AB}(3; -4; 3), \overrightarrow{AC}(1; -6; 0)$. Giả sử tồn tại số $k \neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = k \\ -4 = -6k \\ 3 = 0k \end{cases}$ vô

nghiệm suy ra không tồn tại k . Suy ra 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{AB}(3; -4; 3), \overrightarrow{AD}(6; -8; 6) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$. Vậy 3 điểm A, B, D thẳng hàng.

c) Sai.

Ta có $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{3+24}{\sqrt{9+9+16} \cdot \sqrt{1+36}} = \frac{27\sqrt{1258}}{1258}$.

d) Sai.

Ta có $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}; \vec{u} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{u} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (18; 3; -14) = (x-1; 2x+1; 3z-5)$

Suy ra

$$\begin{cases} x-1=18 \\ 2y+1=3 \\ 3z-5=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=19 \\ y=1 \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 19^2 + 1 + 9 = 371$$

👉 Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{a} + \vec{b}| = 6$. Tính $|\vec{a} - \vec{b}|$. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

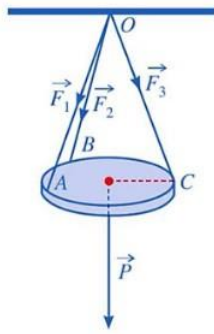
Lời giải

ĐS: 3,74.

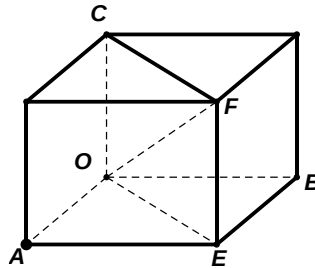
Ta có: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 \Rightarrow 2\vec{a}\vec{b} = |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 11$.

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9 - 11 + 16 = 14 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{14} \approx 3,74$.

Câu 2: Một chiếc đèn trang trí hình tròn được treo song song với mặt phẳng trần nhà nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn OA, OB, OC đôi một vuông góc (như hình vẽ dưới đây). Biết lực căng dây tương ứng trên mỗi dây OA, OB, OC lần lượt là $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ thỏa mãn $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 16$ (N). Tính trọng lượng (đơn vị: N) của chiếc đèn đó. (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Lời giải



ĐS: 27,7

Ta có: $P = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3| = |\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}|$.

Vẽ hình vuông $OAEB$, ta có $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OE}$. (Quy tắc hình bình hành)

Vẽ hình chữ nhật $OCFE$, ta có $\vec{OC} + \vec{OE} = \vec{OF}$. (Quy tắc hình bình hành)

Suy ra: $P = |\vec{OF}| = OF$.

Xét hình vuông $OAEB$, cạnh 16, có đường chéo $OE = 16\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông OEF , vuông tại E , có

$$OF = \sqrt{OE^2 + EF^2} = \sqrt{(16\sqrt{2})^2 + 16^2} = 16\sqrt{3} \approx 27,7$$

Vậy $P \approx 27,7$ (N).

Câu 3: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho 2 điểm $B(2;1;0)$; $C(1;4;5)$.

Điểm $M(x;y;z)$ thuộc trục hoành sao cho $MB=MC$. Khi đó giá trị $2x+y+z$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Do điểm $M \in OX$ nên ta gọi $M(x;0;0)$ ta có $MB=MC \Leftrightarrow MB^2 = MC^2$.

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + 1^2 + 0^2 = (x-1)^2 + 4^2 + 5^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = x^2 - 2x + 42 \Leftrightarrow x = \frac{-37}{2}.$$

Vậy $M\left(-\frac{37}{2}; 0; 0\right) \Rightarrow 2x + y + z = -37$.

Câu 4: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120° . Biết rằng $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 3$, tính giá trị của biểu thức $A = |\vec{a} - \vec{b}| + |\vec{a} + \vec{b}|$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

$$\text{Ta có: } |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ + 9 = 37$$

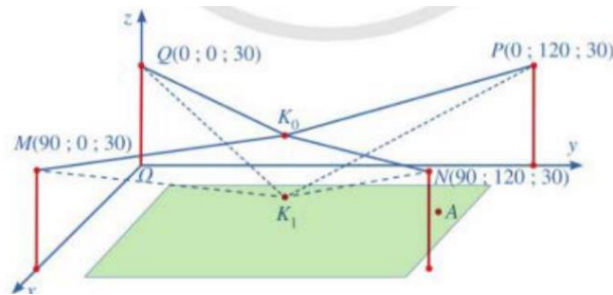
$$\text{Tương tự } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ + 9 = 13$$

$$\text{Do đó } A = |\vec{a} - \vec{b}| + |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{37} + \sqrt{13} \approx 9,69.$$

Câu 5: Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn.

Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90; 0; 30)$, $N(90; 120; 30)$, $P(0; 120; 30)$, $Q(0; 0; 30)$.

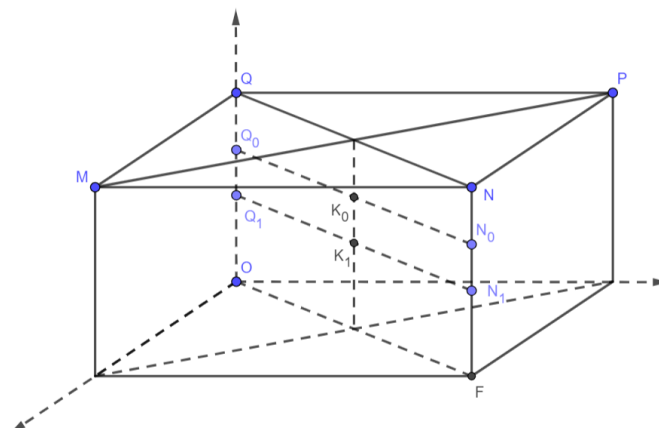
Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 cao độ bằng 19.



Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{K_0K_1} = (a; b; c)$ với a, b, c là các số thực. Tính $P = a + b - c$?

Lời giải

Trả lời: 6



Trong mặt phẳng $OQNF$:

Qua điểm K_0 kẻ đường thẳng song song với NQ , đường thẳng này cắt OQ, NF lần lượt tại $Q_0; N_0$. Khi đó: $Q_0(0;0;25); N_0(90;120;25)$.

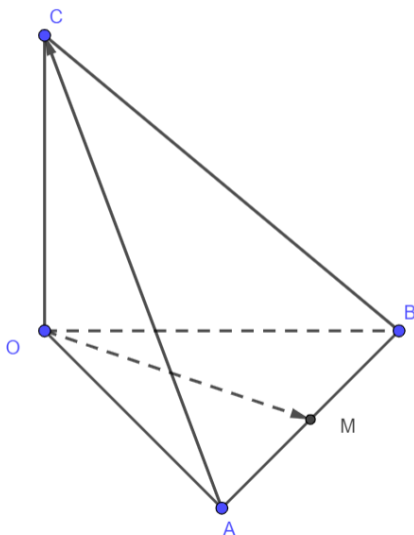
Trung điểm K_0 của Q_0N_0 có tọa độ: $K_0(45;60;25)$.

Qua điểm K_1 kẻ đường thẳng song song với NQ , đường thẳng này cắt OQ, NF lần lượt tại $Q_1; N_1$. Khi đó: $Q_1(0;0;19); N_1(90;120;19)$.

Trung điểm K_1 của Q_1N_1 có tọa độ: $K_1(45;60;19)$.

Khi đó: $\overrightarrow{K_0K_1} = (0;0;-6) \Rightarrow P = a + b - c = 6$.

Câu 6: Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Cô sin góc giữa hai vector $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng $-\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $Q = a.b$?



Lời giải

Trả lời: 2

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

Khi đó, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Ta có: $\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$.

Mặt khác, do $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{c} - \vec{a}$ nên $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{a}) = -\frac{1}{2}$.

Ta lại có: $|\overrightarrow{OM}| = OM = \frac{\sqrt{2}}{2}; |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{2}$.

Do đó, $\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$.

Vậy $Q = a.b = 2$.

♦ **Đề 3:**

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.

B. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

C. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'}$.

D. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AA'}$.

Lời giải

Theo quy tắc hình hộp ta có đáp án **B.**

Câu 2: Nếu một vật có khối lượng $m(kg)$ thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của trái đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{p} = m \vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8(m/s^2)$. Độ lớn của lực trái đất tác dụng lên một quả lê có khối lượng $105g$ là

A. $102,9N$.

B. $1029N$.

C. $1,029N$.

D. $10,29N$.

Lời giải

Đổi $105g = 0,105kg$

Độ lớn của lực hấp dẫn của trái đất tác dụng lên quả lê là $|\vec{p}| = m|\vec{g}| = 0,105.9,8 = 1,029N$.

Câu 3: Cho biết máy bay A đang bay với vận tốc $\vec{u} = (300; 200; 400)$ (đơn vị: km/h)

Máy bay B ngược hướng và có tốc độ gấp 2 lần tốc độ của máy bay A . Tọa độ vector vận tốc $\vec{v}$

của máy bay B là

A. $\vec{v} = (600; 400; 800)$.

B. $\vec{v} = (150; 100; 200)$.

C. $\vec{v} = (-600; -400; -800)$.

D. $\vec{v} = (-150; -100; -200)$.

Lời giải

Tọa độ vector vận tốc $\vec{v}$ của máy bay B là: $\vec{v} = -2\vec{u} \Rightarrow \vec{v} = (-600; -400; -800)$

Câu 4: Cho hai điểm $A(-3; 2; -1), B(-1; 0; 5)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

- A.** $I(-1; 1; 2)$ **B.** $I(2; 1; -2)$. **C.** $I(-2; -1; 2)$ **D.** $I(-2; 1; 2)$.

Lời giải

Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là $I(-2; 1; 2)$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, biết $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$. Tọa độ của điểm M là

- A.** $(-2; 3; -1)$. **B.** $(2; -3; 1)$. **C.** $(-3; 2; 1)$. **D.** $(2; 1; -3)$.

Lời giải

Vì $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ nên $M(2; -3; 1)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 2; 1), B(0; 1; 3)$. Tọa độ của vector $\overrightarrow{AB}$ là

- A.** $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 2)$. **B.** $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 4)$. **C.** $\overrightarrow{AB} = (-2; 1; -2)$. **D.** $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 3)$.

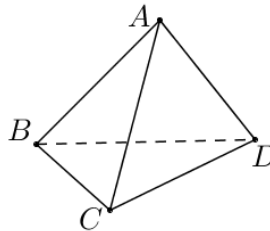
Lời giải

Vì $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ nên $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 2)$.

Câu 7: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 2. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

- A.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -4$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2$. **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 1$. **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Lời giải



Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên các tam giác ABC và ABD là các tam giác đều.

Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ - 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 0$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (-2; 1; 5)$ và $\vec{v} = (0; -3; 1)$. Tích vô hướng của hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là

- A.** $\sqrt{30} \cdot \sqrt{10}$. **B.** $-\sqrt{30} \cdot \sqrt{10}$. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Tích vô hướng của hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) + 5 \cdot 1 = 2$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(2; -4; 3), B(2; 2; 7)$. Trung điểm của AB có tọa độ là

- A.** $(2; 6; 4)$ **B.** $(1; 3; 2)$ **C.** $(4; -2; 10)$. **D.** $(2; -1; 5)$

Lời giải

$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm của } AB \text{ ta có } \begin{cases} x_I = \frac{2+2}{2} = 2 \\ y_I = \frac{-4+2}{2} = -1 \\ z_I = \frac{3+7}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow I(2; -1; 5)$$

Câu 10: Cho hai điểm $A(2; 3; -4)$ và $B(0; 1; 6)$. Trung điểm M của đoạn thẳng AB có tọa độ là:

- A.** $M(-2; -2; 10)$. **B.** $M(1; 2; 2)$. **C.** $M(1; 2; 1)$. **D.** $M(2; 2; -10)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right) = \left(\frac{1+0}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{-4+6}{2}\right) = (1; 2; 1) \text{ là trung điểm của } AB.$$

Câu 11: Cho tam giác MNP có $M(1; 1)$, $N(-1; 0)$, $P(3; -7)$. Trọng tâm G của tam giác MNP có tọa độ là

- A.** $(1; -2)$. **B.** $(-1; 2)$. **C.** $(1; 2)$. **D.** $(3; -6)$.

Lời giải

$$\text{Theo công thức tính tọa độ trọng tâm của tam giác ta có } \begin{cases} x_G = \frac{1-1+3}{3} \\ y_G = \frac{1+0-7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 1 \\ y_G = -2 \end{cases}.$$

Câu 12: Trong không gian, xét hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (H.2.52). Đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan và một chiếc tàu thám hiểm có tọa độ là $(30; 25; -15)$. Khoảng cách theo đơn vị kilômét từ chiếc ra đa và một chiếc tàu thám hiểm. (Kết quả làm tròn lấy một chữ số thập phân)



Hình 2.52

- A.** $41,8\text{km}$. **B.** $31,8\text{km}$. **C.** $41,9\text{km}$. **D.** $31,9\text{km}$.

Lời giải

Theo đề bài ta có tọa độ của ra đa là $(0;0;0)$, tọa độ của tàu thám hiểm là $(30;25;-15)$.

Khi đó khoảng cách giữa ra đa và tàu thám hiểm là:

$$d = \sqrt{(30-0)^2 + (25-0)^2 + (-15-0)^2} = 5\sqrt{70} \approx 41,8.$$

Vậy khoảng cách giữa ra đa và tàu thám hiểm là 41,8 km.

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;3;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(1;1;-2)$. Phát biểu dưới đây đúng hay sai

a) $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

b) $\overrightarrow{AB} = (3; -1; -1)$

c) Gọi D là điểm sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Khi đó $D(4; 2; -1)$

d) H là trực tâm tam giác ABC , khi đó, độ dài đoạn OH bằng $\frac{\sqrt{870}}{15}$.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) Đ

Gọi $D(x; y; z)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (-3; -1; -1)$, $\overrightarrow{DC} = (1-x; 1-y; -2-z)$

$$\text{Vì } ABCD \text{ là hình bình hành nên } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} -3 = 1-x \\ -1 = 1-y \\ -1 = -2-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Vậy $D(4; 2; -1)$

d) Đ

Gọi $H(x; y; z)$ là trực tâm tam giác ABC .

$$\text{Khi đó tọa độ điểm } H \text{ thỏa mãn } \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} \text{ cùng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -1 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ x - 8y + 5z = -17 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } H\left(\frac{2}{15}; \frac{29}{15}; -\frac{1}{3}\right).$$

$$\text{Vậy } OH = \frac{\sqrt{870}}{15}.$$

Câu 2: [Mức độ 2] Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 vector $\vec{u} = m\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{v} = m\vec{j} + 2\vec{i} + 4\vec{k}$. Biết rằng $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$, khi đó giá trị của m bằng 5.
- b) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1; -2; 1)$ và $\vec{v} = (-2; 1; 1)$, góc giữa hai vector đã cho bằng 60° .
- c) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 2; 0)$ và $A'(0; 0; 2)$. Góc giữa BC' và $A'C$ là 90° .
- d) Trong không gian $Oxyz$, gọi j là góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$, khi đó $\cos j$ bằng $\frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) Đ

d) S

a) Ta có $\vec{u} = m\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \vec{u} = (m; 2; -3)$, $\vec{v} = m\vec{j} + 2\vec{i} + 4\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = (2; m; 4)$.

Theo đề bài $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \Rightarrow 2m + 2m - 3 \cdot 4 = 8 \Leftrightarrow m = 5$.

b) Ta có $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{u}; \vec{v}) = 120^\circ$.

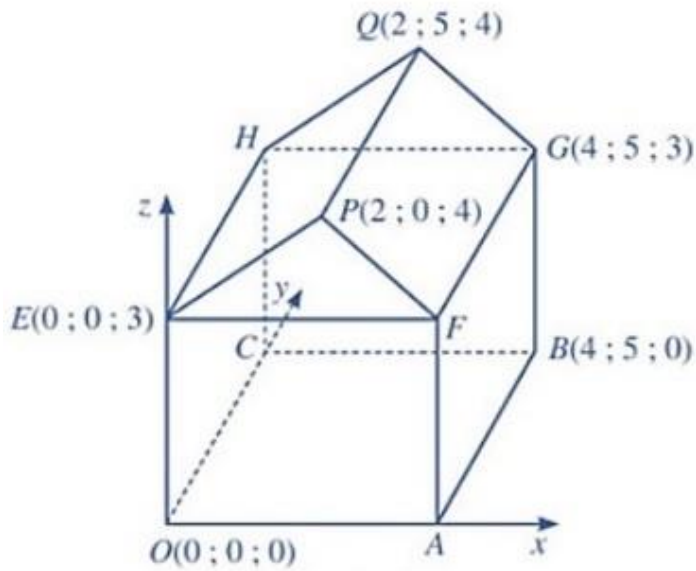
c) Ta có: $B(2; 0; 0)$, $C'(0; 2; 2)$ nên $\overrightarrow{BC'} = (-2; 2; 2)$.

$A'(0; 0; 2)$, $C(0; 2; 0)$ nên $\overrightarrow{A'C} = (0; 2; -2)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BC'} \cdot \overrightarrow{A'C} = 0$.

d) Công thức tính góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Câu 3: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



Xét tính đúng sai các mệnh đề sau:

a) Toạ độ điểm $F(4;0;3)$.

b) Toạ độ vector $\overrightarrow{AH} = (4;5;3)$.

c) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AF} = 3$.

d) Góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

a) Đ;

b) S;

c) S;

d) Đ.

a) Vì nền nhà là hình chữ nhật nên $OACB$ là hình chữ nhật, suy ra $x_A = x_B = 4$, $y_C = y_B = 5$.

Do điểm A nằm trên trục Ox nên toạ độ điểm $A(4;0;0)$; điểm C nằm trên trục Oy nên toạ độ điểm $C(0;5;0)$.

Tường nhà là hình chữ nhật nên $OCHE$ là hình chữ nhật, suy ra $y_H = y_C = 5$, $z_H = z_E = 3$.

Do H nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên toạ độ điểm $H(0;5;3)$.

Tứ giác $OAFE$ là hình chữ nhật nên $x_F = x_A = 4$, $z_F = z_E = 3$

Do F nằm trên mặt phẳng (Oxz) nên toạ độ điểm $F(4;0;3)$.

b) Ta có toạ độ vector $\overrightarrow{AH} = (-4;5;3)$.

c) Ta có $\overrightarrow{AF} = (0;0;3)$. Suy ra $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 + 0 + 9 = 9$.

d) Để tính góc dốc của mái nhà, ta tính số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$.

Do mặt phẳng (Ozx) vuông góc với hai mặt phẳng $(FGQP)$ và $(FGHE)$ nên PFE là góc phẳng nhị diện cần tìm.

Ta có $\overrightarrow{FP} = (-2; 0; 1)$, $\overrightarrow{FE} = (-4; 0; 0)$ suy ra

$$\cos PFE = \cos(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FE}) = \frac{\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FE}}{|\overrightarrow{FP}| \cdot |\overrightarrow{FE}|} = \frac{(-2)(-4) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Do đó, $PFE \approx 26,6^\circ$. Vậy góc dốc mái nhà khoảng $26,6^\circ$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 1; 2)$, $B(3; -1; 2)$ và $C(2; 0; 1)$.

- Ba điểm A , B , C không thẳng hàng.
- Điểm $M(a; b; 3)$ thỏa mãn ba điểm A , C , M thẳng hàng thì $a + b = 2$.
- Gọi α là góc tạo bởi hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ thì $\cos \alpha = -1$.
- Gọi điểm $M(a; b; 3)$ thỏa mãn ba điểm A , B , M thẳng hàng. Khi đó tích có hướng của hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ là $(1; 1; 2)$.

Lời giải

a) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-1; 1; -1)$. Suy ra $\overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{BC}$ với mọi $k \in \mathbb{R}$ nên ba điểm A , B , C không thẳng hàng.

b) Đúng.

Ta có $\overrightarrow{AC} = (1; -1; -1)$, $\overrightarrow{AM} = (a - 1; b - 1; 1)$.

$$\text{Ba điểm } A, C, M \text{ thẳng hàng suy ra } \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k(a - 1) \\ -1 = k(b - 1) \\ -1 = k \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ k = -1 \end{cases}.$$

Vậy $a + b = 0 + 2 = 2$

c) Sai.

$$\cos \alpha = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-1)}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

d) Sai.

$$\overrightarrow{AB} = (2; -2; 0), \overrightarrow{AM} = (-1; 1; 1).$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] = (-2; -2; 4).$$

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Đáp án: $D(-4;-2;9)$

Lời giải

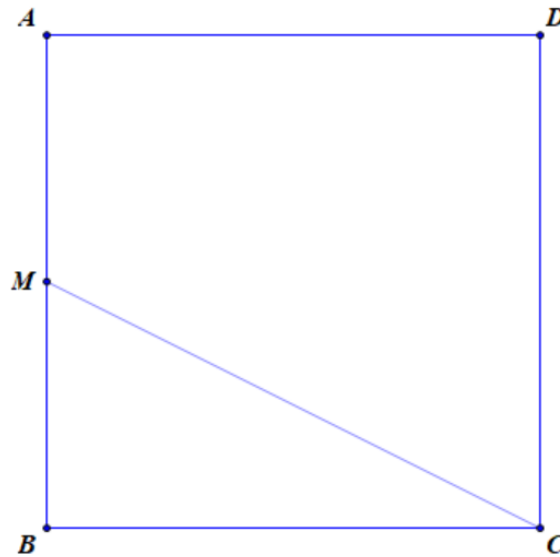
Gọi $D(x; y; z)$. Để $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1; 3; -7) = (-3 - x; 1 - y; 2 - z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow D(-4; -2; 9).$$

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$ bằng:

Đáp án: $6\sqrt{10}$.

Lời giải



$$\overrightarrow{BD} = (-8; -4; -8) \Rightarrow BD = 12 \Rightarrow AB = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}.$$

$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm } AB \Rightarrow MC = 3\sqrt{10}.$$

$$|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = |2\overrightarrow{CM}| = 2CM = 6\sqrt{10}.$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ cho hai vec tơ $\vec{a} = (1; -2; 0)$, $\vec{b} = (1; 3; -2)$. Góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng bao nhiêu (tính theo độ làm tròn đến hàng phần chục)

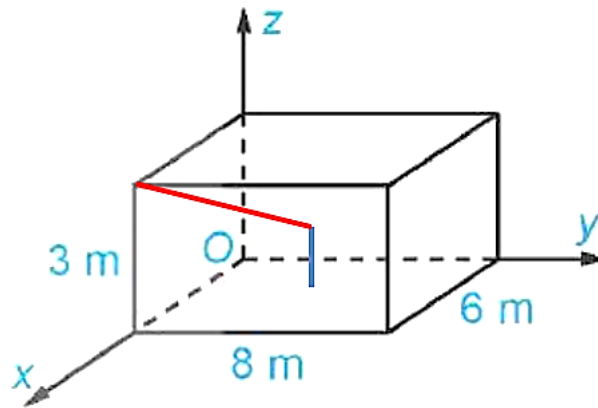
Đáp án: 126,7

Lời giải

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1-6}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{14}}$$

Vậy $(\vec{a}, \vec{b}) \approx 126,7$

Câu 4: Trong một phòng học được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật, với chiều dài $8m$, chiều rộng $6m$ và chiều cao $3m$. Hai bạn An và Bình làm nhiệm vụ trực nhật, mạng nhện cần quét ở góc ngoài cùng trên trần nhà, An bảo không nên đứng ngay vị trí đó ở nền nhà quét vì sẽ bụi rơi xuống người mình, An lại đồ bạn Bình ‘nếu mình đứng ở giữa nhà quét thì mình phải kéo chổi quét nhà dài ra mấy mét (làm tròn đến hàng phần trăm) để quét được vị trí mạng nhện, biết An cầm chổi cao $1,5m$ ’. Bình trả lời đứng vị trí đó chổi dài $5m$ cũng không tới. Hỏi Bình đã tính được bao nhiêu?



Đáp án: 5.22(m)

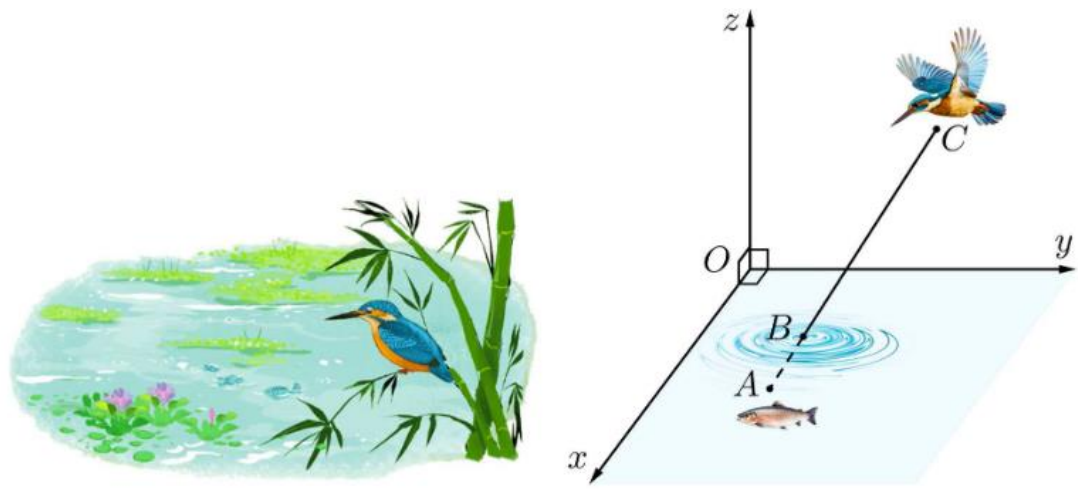
Lời giải

Xét hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, ta có vị trí mạng nhện ở $A(6; 0; 3)$ vị trí cầm chổi $B(3; 4; \frac{3}{2})$

, Vậy chổi phải có độ dài $AB = \sqrt{(3-6)^2 + (4-0)^2 + (\frac{3}{2}-3)^2} = \frac{\sqrt{109}}{2} \approx 5.22(m)$

Câu 5: Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O nằm trên mặt nước, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước, trục Oz hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang ở vị trí cách mặt nước $2m$, cách mặt phẳng $(Oxz), (Oyz)$ lần lượt là $3m$ và $1m$ phóng thẳng xuống vị trí con cá, biết con cá cách mặt nước $50cm$, cách mặt phẳng $(Oxz), (Oyz)$ lần lượt là $1m$ và $1,5m$

Tìm tọa độ điểm B lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước.



Đáp án : $B\left(\frac{7}{5}; \frac{7}{5}; 0\right)$.

Lời giải

Ta có: $A(1,5;1;-0,5)$ và $C(1;3;2)$

$\overrightarrow{AC}(-0,5;2;2,5)$

Khi đó phương trình đường thẳng AC là
$$\begin{cases} x = -0,5t + 1 \\ y = 2t + 3 \\ z = 2,5t + 2 \end{cases} \quad \text{suy ra } 2,5t + 2 = 0 \Rightarrow t = -\frac{4}{5}.$$

Khi đó $\begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{7}{5} \\ z = 0 \end{cases}$ hay $B\left(\frac{7}{5}; \frac{7}{5}; 0\right)$

Câu 6: [Mức độ 3] Một căn phòng dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài $8m$, rộng $6m$ và cao $4m$ có hai chiếc quạt treo tường. Chiếc quạt A treo chính giữa bức tường $8m$ và cách trần $1m$, chiếc quạt B treo chính giữa bức tường $6m$ và cách trần $1,5m$. Hỏi khoảng cách giữa hai chiếc quạt AB cách nhau bao nhiêu m (làm tròn đến hàng phần nghìn)

Đáp án: $AB = 5,025$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó ta có điểm $A(4;0;3)$ và điểm $B\left(0;3;\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(-4;3;-\frac{1}{2}\right)$. Do đó độ dài đoạn thẳng $AB = 5,025$.